

Универсальный k -закон нуля или единицы

А.Д. Матушкин

1 Введение

В данной работе изучаются предельные вероятности свойств первого порядка случайного графа в модели Эрдеша–Реньи $G(n, n^{-\alpha})$, где $\alpha \in (0, 1)$. Мы нашли для любого k и для любого рационального числа $t/s \in (0, 1)$ интервал с правым концом t/s , на котором выполнен k -закон нуля или единицы, описывающий поведение вероятностей свойств первого порядка, выраженных формулами с ограниченной числом k кванторной глубиной. Также для рациональных чисел t/s с числителем, не превосходящим 2, мы доказали, что логарифм длины найденного нами интервала имеет тот же порядок малости (при $n \rightarrow \infty$), что и логарифм длины наибольшего интервала с правым концом t/s , на котором выполнен k -закон нуля или единицы.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $p = p(n) \in (0, 1)$. Рассмотрим множество $\Omega_n = \{G = (V_n, E)\}$ всех неориентированных графов без петель и кратных ребер с множеством вершин $V_n = \{1, \dots, n\}$. Случайный граф в модели Эрдеша–Реньи (см. [1]–[8]) это случайный элемент $G(n, p)$ со значениями во множестве Ω_n и распределением $P_{n,p}$ на $(\Omega_n, \mathcal{F}_n)$, где $\mathcal{F}_n = 2^{\Omega_n}$, определенным формулой

$$P_{n,p}(G) = p^{|E|}(1-p)^{C_n^2 - |E|}, \quad G \in \Omega_n.$$

Говорят, что случайный граф *подчиняется закону нуля или единицы* для класса свойств \mathcal{C} , если вероятность выполнения каждого свойства из этого класса стремится либо к 0, либо к 1.

Пожалуй, самым изученным в этом направлении является класс свойств, выражаемых формулами первого порядка (см. [9], [10]). Класс свойств первого порядка обозначим \mathcal{L} . В 1988 году Дж. Спенсер и С. Шела (см. [11], [12]) установили, что при $p = n^{-\alpha}$, $\alpha \in (0, \infty) \setminus \mathbb{Q}$, случайный граф $G(n, p)$ подчиняется закону нуля или единицы для класса свойств первого порядка (в случае множества всех свойств первого порядка мы будем говорить просто “закон нуля или единицы”). В той же работе было доказано, что при $\alpha \in (0, 1] \cap \mathbb{Q}$ случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ закону нуля или единицы не подчиняется.

В данной работе мы рассмотрим класс $\mathcal{L}_k \subset \mathcal{L}$ свойств, выражаемых формулами с кванторной глубиной, ограниченной числом k (см. [9]). Будем говорить, что случайный граф *подчиняется k -закону нуля или единицы*, если он подчиняется закону нуля или

единицы для класса \mathcal{L}_k .

Ранее было установлено, что случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется k -закону нуля или единицы при α близких к нулю и при α близких к единице.

Теорема 1 (М.Е. Жуковский, [13], [14]). Пусть $k \geq 3$ и $\alpha \in (0, 1/(k-2))$. Тогда случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется k -закону нуля или единицы. Если же $\alpha = 1/(k-2)$, то случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ не подчиняется k -закону нуля или единицы.

Тем самым, $\frac{1}{k-2}$ — наименьшее положительное значение α , при котором нарушается k -закон нуля или единицы для $G(n, n^{-\alpha})$.

Теорема 2 (М.Е. Жуковский, [15], [16]). Пусть β — произвольное положительное рациональное число, $\alpha = 1 - \frac{1}{2^{k-1}+\beta}$. Пусть, кроме того, \mathcal{Q} — множество положительных дробей с числителем, не превосходящим числа 2^{k-1} , $\tilde{\mathcal{Q}}$ — множество натуральных чисел, не превосходящих $2^{k-1} - 2$. Случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется k -закону нуля или единицы, если $\beta \in (0, \infty) \setminus \mathcal{Q}$. Случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ не подчиняется k -закону нуля или единицы, если $\beta \in \tilde{\mathcal{Q}}$. Если же $\alpha \in \{1 - \frac{1}{2^{k-1}}, 1 - \frac{1}{2^k}\}$, то случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется k -закону нуля или единицы.

Итак, $1 - \frac{1}{2^{k-2}}$ — наибольшее значение α , меньшее 1, при котором нарушается k -закон нуля или единицы для $G(n, n^{-\alpha})$.

Обратимся к точкам α из $(0, 1)$, в окрестностях которых не выполнен k -закон нуля или единицы. Для этого введем понятие критической точки. Рациональная точка α называется *критической для свойства A* , если не выполнено следующее свойство. Существуют такие $\varepsilon > 0$ и $\delta \in \{0, 1\}$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n,p}(A) = \delta$ для всех $p \in [n^{-\alpha-\varepsilon}, n^{-\alpha+\varepsilon}]$. Дж. Спенсер (см. [17]) доказал, что существуют свойства первого порядка с бесконечным количеством критических точек в интервале $(0, 1)$. В совместной работе Дж. Спенсер и С. Шела (см. [18]) доказали, что множество критических точек вполне упорядочено относительно порядка $>$. Таким образом, все его предельные точки являются правосторонними пределами. Будем называть точку k -критической, если она является критической хотя бы для одного свойства первого порядка, кванторная глубина которого не превосходит числа k . Так как для любого натурального k выполнено $|\mathcal{L}_k| < \infty$ (см. [9]), то слева от каждой рациональной точки $t/s \in (0, 1)$ существует целый интервал, внутри которого нет ни одной k -критической точки (поэтому на этом интервале выполнен k -закон нуля или единицы). Мы нашли явно такой интервал для любых натуральных $k \geq 4$ и рациональных $t/s \in (0, 1)$, а также для рациональных чисел t/s с числителем, не превосходящим 2, мы доказали, что логарифм длины найденного нами интервала имеет тот же порядок малости, что и логарифм длины максимального такого интервала.

Дальнейшее повествование будет устроено следующим образом. В разделе 3 мы сформулируем доказанные нами теоремы о левых полукрестностях рациональных чисел, внутри которых отсутствуют k -критические точки. Раздел 2 посвящен предельным вероятностям свойств, связанных с содержанием некоторого фиксированного подграфа в случайном графе $G(n, n^{-\alpha})$. Данные свойства понадобятся нам при доказательстве теорем раздела 3.

2 Малые подграфы

Введем некоторые обозначения. Для произвольного графа G обозначим за $v(G)$ число его вершин, $e(G)$ — число его ребер, $a(G)$ — число его автоморфизмов. Плотность графа $\frac{e(G)}{v(G)}$ обозначим $\rho(G)$. Далее мы эти обозначения будем использовать и в других разделах статьи. Граф G называется *сбалансированным*, если для каждого его подграфа H выполнено неравенство $\rho(H) \leq \rho(G)$. Граф G *строго сбалансированный*, если для любого собственного подграфа $H \subset G$ справедливо строгое неравенство $\rho(H) < \rho(G)$. Сформулируем теорему (см. [2, 21, 22]) о количестве копий произвольного графа. Пусть N_G — количество копий G в случайном графе $G(n, p)$. Положим $\rho^{\max}(G) = \max\{\rho(H) : H \subseteq G\}$.

Теорема 3 ([2, 21, 22]). Пусть G — произвольный граф. Если $p = o(n^{-1/\rho^{\max}(G)})$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n,p}(N_G > 0) = 0.$$

Если же $n^{-1/\rho^{\max}(G)} = o(p)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n,p}(N_G > 0) = 1.$$

Пусть теперь G — строго сбалансированный граф. Если $n^{-1/\rho(G)} = o(p)$, то для любого $\varepsilon > 0$ справедливо равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_{n,p}(|N_G - E_{n,p}N_G| \leq \varepsilon E_{n,p}N_G) = 1,$$

где $E_{n,p}$ — это математическое ожидание по мере $P_{n,p}$. Если же $p = n^{-1/\rho(G)}$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n,p}(N_G = 0) = e^{-1/a(G)}.$$

Теорема 4 (A.Ruciński, A.Vince, [19]). Пусть $\alpha = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$. Тогда существует строго сбалансированный граф с плотностью $\frac{1}{\alpha}$.

Так как свойство содержать фиксированный граф H можно записать с помощью формулы первого порядка с конечной кванторной глубиной, то из теорем 3 и 4 следует, что для любого рационального $\alpha \in (0, 1)$ существует k , для которого случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ не подчиняется k -закону нуля или единицы.

3 Новые результаты

Нашей целью будет исследовать выполнение закона нуля или единицы для α , находящихся в малой левой полуокрестности некоторого фиксированного рационального числа. Ранее была доказана следующая теорема.

Теорема 5 (М.Е. Жуковский, [20]). *Если $\alpha \in (184/277, 2/3)$, то случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется 4-закону нуля или единицы.*

Замечание. Данный результат можно улучшить, заменив интервал $(184/277, 2/3)$ на $(53/80, 2/3)$, используя методы, аналогичные примененным в [20]. Заметим также, что интервал $(184/277, 2/3)$ является левой полуокрестностью точки $2/3$. Таким образом, данная теорема является аналогом следующих более общих фактов для $k = 4, t/s = 2/3$.

Теорема 6. *Пусть $\frac{t}{s} \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$, $k \geq 4$. Положим $q = \frac{(s+1)^{k-1}}{s}$. Тогда внутри интервала $\left(\frac{tq}{sq+1}, \frac{t}{s}\right)$ нет k -критических точек.*

Следствие 1. *Пусть $\frac{t}{s} \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$, $k \geq 4$. Положим $q = \frac{(s+1)^{k-1}}{s}$. Тогда если $\alpha \in \left(\frac{tq}{sq+1}, \frac{t}{s}\right)$, то случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется k -закону нуля или единицы.*

Теорема 5 дает больший интервал для α , чем теорема 6 для $k = 4, t/s = 2/3$. Мы показали, что если выполнено $C_{k-2}^{[s/t]} < s + 1$, то интервал, полученный в теореме 6 можно увеличить, используя методы, примененные в доказательстве теоремы 5. Таким образом, теорему 6 можно усилить, вследствие чего теорема 5 будет частным случаем такого усиленного варианта.

Теорема 7. *Пусть $\frac{t}{s} \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$, $k \geq 4$. Положим $q = \frac{(s+1)^{k-2}(1+s(C_{k-2}^{[s/t]}+1))-1}{s}$. Тогда внутри интервала $\left(\frac{tq}{sq+1}, \frac{t}{s}\right)$ нет k -критических точек.*

Следствие 2. *Пусть $\frac{t}{s} \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$, $k \geq 4$. Положим $q = \frac{(s+1)^{k-2}(1+s(C_{k-2}^{[s/t]}+1))-1}{s}$. Тогда если $\alpha \in \left(\frac{tq}{sq+1}, \frac{t}{s}\right)$, то случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется k -закону нуля или единицы.*

Легко видеть, что при $C_{k-2}^{[s/t]} < s + 1$ теорема 7 дает больший интервал значений α , при которых выполнен k -закон, чем теорема 6.

Итак, ранее был доказан k -закон нуля или единицы для правой и левой полуокрестности 0 и 1 соответственно. При этом оставался огромный промежуток между $\frac{1}{k-2}$ и

$1 - \frac{1}{2^{k-1}}$, внутри которого не было найдено интервалов, для которых выполняется k -закон нуля или единицы. С помощью теоремы 6 и теоремы 7 мы можем найти такие интервалы на любом промежутке из интервала $(0, 1)$.

Длина интервала, предъявленного в теореме 6, равна $\frac{t}{s(s+1)^k}$. Мы доказали, что для точек вида $\frac{t}{s} = \frac{2}{m}$, $m \geq 2$, теорема 6 дает правильный порядок малости оценки логарифма длины максимального интервала с правым концом $\frac{t}{s}$, на котором нет критических точек. Более формально, для каждого $m \geq 2$, для каждого достаточно большого k мы нашли слева от точки $\frac{2}{m}$ такую точку α , для которой не выполнен k -закон нуля или единицы, причем величина $\frac{2}{m} - \alpha$ уменьшается экспоненциально с ростом k .

Теорема 8. Пусть $\frac{t}{s} = \frac{2}{m}$, $m \geq 2$, $k \geq 10m - 5$. Тогда при $\alpha = \frac{t}{s} - \frac{1}{2^{k-10m+8}m(m-1)}$ случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ не подчиняется k -закону нуля или единицы.

Доказательство теорем 6, 7 и 8 будет построено по следующей схеме: в разделе 5 мы сформулируем теорему Эренфойхта, связывающую законы нуля или единицы и существование выигрышной стратегии второго игрока в игре Эренфойхта. В разделе 6 мы докажем теорему 6, в разделе 7 — теорему 7, а в разделе 8 — теорему 8. Раздел 4 посвящен построению конструкций, свойства которых позволяют нам доказать, что игроки с необходимой вероятностью (стремящейся к 1) смогут играть в соответствии с определенными нами в разделах 6 и 7 стратегиями.

4 Расширения

Обратимся к задаче, поставленной Дж. Спенсером в 1990 году (см. [7], [23]). Рассмотрим такие графы $H, G, \tilde{H}, \tilde{G}$, что $V(H) = \{x_1, \dots, x_k\}$, $V(G) = \{x_1, \dots, x_l\}$, $V(\tilde{H}) = \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}$, $V(\tilde{G}) = \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_l\}$, причем $H \subset G$, $\tilde{H} \subset \tilde{G}$ (тем самым, $k < l$). Граф \tilde{G} называется (G, H) -расширением графа \tilde{H} , когда

$$\{x_{i_1}, x_{i_2}\} \in E(G) \setminus E(H) \Rightarrow \{\tilde{x}_{i_1}, \tilde{x}_{i_2}\} \in E(\tilde{G}) \setminus E(\tilde{H}).$$

Если выполняется соотношение

$$\{x_{i_1}, x_{i_2}\} \in E(G) \setminus E(H) \Leftrightarrow \{\tilde{x}_{i_1}, \tilde{x}_{i_2}\} \in E(\tilde{G}) \setminus E(\tilde{H}),$$

то \tilde{G} назовем *точным* (G, H) -расширением. Зафиксируем число $\alpha > 0$. Положим

$$v(G, H) = |V(G) \setminus V(H)|, \quad e(G, H) = |E(G) \setminus E(H)|,$$

$$f_\alpha(G, H) = v(G, H) - \alpha e(G, H).$$

Если для любого такого графа S , что $H \subset S \subseteq G$, выполнено неравенство $f_\alpha(S, H) > 0$, то пара (G, H) называется α -надежной (см. [4], [7], [23]). Введем, наконец, понятие

максимальной пары. Пусть $\tilde{H} \subset \tilde{G} \subset \Gamma$ и $T \subset K$, причем $|V(T)| \leq |V(\tilde{G})|$. Пару (\tilde{G}, \tilde{H}) назовем (K, T) -максимальной в Γ , если у любого такого подграфа \tilde{T} графа \tilde{G} , что $|V(\tilde{T})| = |V(T)|$ и $\tilde{T} \cap \tilde{H} \neq \tilde{T}$, не существует такого точного (K, T) -расширения \tilde{K} в $\Gamma \setminus (\tilde{G} \setminus \tilde{T})$, что каждая вершина из $V(\tilde{K}) \setminus V(\tilde{T})$ не соединена ребром ни с одной вершиной из $V(\tilde{G}) \setminus V(\tilde{T})$. Граф \tilde{G} назовем (K, T) -максимальным в Γ , если у любого такого подграфа \tilde{T} графа \tilde{G} , что $|V(\tilde{T})| = |V(T)|$, не существует такого точного (K, T) -расширения \tilde{K} в $\Gamma \setminus (\tilde{G} \setminus \tilde{T})$, что каждая вершина из $V(\tilde{K}) \setminus V(\tilde{T})$ не соединена ребром ни с одной вершиной из $V(\tilde{G}) \setminus V(\tilde{T})$.

Теорема 9 (J.H. Spencer, M.E. Zhukovskii, [25]). Пусть $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$. Пусть пара (G, H) — α_2 -надежная (граф H может быть пустым) и пусть \mathcal{K} — конечное множество пар графов, таких что для любой пары $(K, T) \in \mathcal{K}$ выполнены неравенства $f_{\alpha_1}(K, T) < 0$ и $v(T) \leq v(G)$. Пусть также $p \in [n^{-\alpha_2}, n^{-\alpha_1}]$. Тогда с вероятностью, стремящейся к единице при $n \rightarrow \infty$, выполнено следующее свойство. Для любых вершин $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k$ графа $G(n, p)$ существует такое точное (G, H) -расширение \tilde{G} графа $\tilde{H} := G(n, p)|_{\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}}$ в $G(n, p)$, что пара (\tilde{G}, \tilde{H}) является (K, T) -максимальной в $G(n, p)$ для любой пары $(K, T) \in \mathcal{K}$.

5 Игра Эренфойхта

Основным средством в доказательстве законов нуля или единицы для свойств первого порядка случайных графов, как мы заметили выше, служит теорема А. Эренфойхта, доказанная в 1960 году (см. [24]). В данном разделе мы сформулируем ее частный случай для графов. Прежде всего определим игру Эренфойхта $\text{EHR}(G, H, i)$ на двух графах G, H с количеством раундов, равным i (см., например, [4], [7]). Пусть $V(G) = \{x_1, \dots, x_n\}$, $V(H) = \{y_1, \dots, y_m\}$. В ν -ом раунде ($1 \leq \nu \leq i$) Новатор выбирает вершину из любого графа (он выбирает либо $x_{j_\nu} \in V(G)$, либо $y_{j'_\nu} \in V(H)$). Затем Консерватор выбирает вершину из оставшегося графа. Если Новатор выбирает в μ -ом раунде, скажем, вершину $x_{j_\mu} \in V(G)$, $j_\mu = j_\nu$ ($\nu < \mu$), то Консерватор должен выбрать $y_{j'_\nu} \in V(H)$. Если же в этом раунде Новатор выбирает, скажем, вершину $x_{j_\mu} \in V(G)$, $j_\mu \notin \{j_1, \dots, j_{\mu-1}\}$, то и Консерватор должен выбрать такую вершину $y_{j'_\mu} \in V(H)$, что $j'_\mu \notin \{j'_1, \dots, j'_{\mu-1}\}$. Если он не может этого сделать, то игру выигрывает Новатор. К концу игры выбраны вершины $x_{j_1}, \dots, x_{j_i} \in V(G)$, а также вершины $y_{j'_1}, \dots, y_{j'_i} \in V(H)$. Некоторые из этих вершин могут совпадать. Выберем из них только различные: $x_{h_1}, \dots, x_{h_l}; y_{h'_1}, \dots, y_{h'_l}$, $l \leq i$. Консерватор побеждает тогда и только тогда, когда соответствующие подграфы изоморфны с точностью до порядка вершин:

$$G|_{\{x_{h_1}, \dots, x_{h_l}\}} \cong H|_{\{y_{h'_1}, \dots, y_{h'_l}\}}.$$

Теорема 10 (A. Ehrenfeucht, [24]). Для любых двух графов G, H и любого $i \in \mathbb{N}$ Консерватор имеет выигрышную стратегию в игре $\text{EHR}(G, H, i)$ тогда и только тогда,

когда для любого свойства L первого порядка, выражаемого формулой, кванторная глубина которой не превышает i , либо оба графа обладают этим свойством, либо оба не обладают.

Несложно показать, что из этой теоремы вытекает следующее следствие о законах нуля или единицы (см., например, [25]). Пусть $P_{n,p(n)} \times P_{m,p(m)}$ — прямое произведение мер $P_{n,p(n)}, P_{m,p(m)}$.

Теорема 11 (J.H. Spencer, M.E. Zhukovskii, [25]). Пусть $p_1 = p_1(n), p_2 = p_2(n)$ — две функции, все значения которых лежат в отрезке $[0, 1]$, такие что $p_1(n) \leq p_2(n)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Тогда, если равенство

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} P_{n,p(n)} \times P_{m,p(m)}(\{(A, B) : \text{у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре EHR}(A, B, k)\}) = 1$$

выполнено для любой функции $p \in [p_1, p_2]$, то для любого свойства $L \in \mathcal{L}_k$ существует такое $\delta \in \{0, 1\}$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n,p(n)}(L) = \delta$ для любой функции $p \in [p_1, p_2]$.

6 Доказательство теоремы 6

Пусть $\frac{t}{s} \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$. Положим

$$q = \frac{(s+1)^k - 1}{s}. \quad (1)$$

Пусть $\alpha \in (\frac{tq}{sq+1}, \frac{t}{s})$. Возьмем столь малое $\varepsilon > 0$, чтобы отрезок $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$ полностью лежал внутри интервала $(\frac{tq}{sq+1}, \frac{t}{s})$. Пусть $p \in [n^{-\alpha-\varepsilon}, n^{-\alpha+\varepsilon}]$. Для каждого $i \in \{0, \dots, k\}$ положим

$$q_i = q - \frac{(s+1)^{k-i} - 1}{s}. \quad (2)$$

Определим $\mathcal{K}_i, i \in \{0, \dots, k\}$, как множество всех таких (попарно неизоморфных) пар (K, T) , что $f_{\alpha-\varepsilon}(K, T) < 0, v(T) \leq q_i, v(K, T) \leq q - q_i$. Заметим, что \mathcal{K}_0 — множество таких пар $(K, (\emptyset, \emptyset))$, что $\rho(K, T) > 1/(\alpha - \varepsilon)$, а $\mathcal{K}_k = \emptyset$. Теперь определим множество графов \mathcal{S} . Граф G принадлежит \mathcal{S} тогда и только тогда, когда он обладает следующими свойствами.

- 1) В графе G нет подграфов, количество вершин которых не превосходит q , а плотность больше, чем $\frac{1}{\alpha-\varepsilon}$.
- 2) Пусть \mathcal{H} — множество таких $(\alpha + \varepsilon)$ -надежных пар (H_1, H_2) , что $v(H_1) \leq q$. Тогда для любой пары $(H_1, H_2) \in \mathcal{H}$ и для любого подграфа $G_2 \subset G$ на $v(H_2)$ вершинах в графе G найдется такое точное (H_1, H_2) -расширение G_1 подграфа G_2 , что (G_1, G_2) является (K_1, K_2) -максимальной парой в G для любой пары $(K_1, K_2) \in \mathcal{K}_i$ для любого $i \in \{1, \dots, k\}$.

В силу теорем 3 и 9 для любого $p \in [n^{-\alpha-\varepsilon}, n^{-\alpha+\varepsilon}]$ справедливо $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n,p}(\mathcal{S}) = 1$. Следовательно, в силу теоремы 11 для доказательства теоремы 6 достаточно найти выигрышную стратегию Консерватора в игре $\text{EHR}(G, H, k)$ для всех таких пар графов (G, H) , что $G, H \in \mathcal{S}$.

Итак, пусть $G, H \in \mathcal{S}$. Для каждого $h \in \{1, \dots, k\}$ обозначим за X_h, Y_h графы выбранные в h -ом раунде Новатором и Консерватором соответственно. Положим также $X_0 = G, Y_0 = H$. Таким образом, множества $\{X_h, Y_h\}$ и $\{G, H\}$ совпадают для всех $h \in \{0, \dots, k\}$. Вершины, выбранные в первых h раундах в графе X_h , мы будем обозначать x_h^1, \dots, x_h^h , а в графе Y_h — y_h^1, \dots, y_h^h .

Определим теперь стратегию Консерватора для раундов $1, \dots, k$. Будем говорить, что *Консерватор выиграл в l -ом раунде*, где $l \in \{0, \dots, k\}$, если существуют такие подграфы $\tilde{X}_l \subset X_l$ и $\tilde{Y}_l \subset Y_l$, что $\{x_l^1, \dots, x_l^l\} \in V(\tilde{X}_l)$, $\{y_l^1, \dots, y_l^l\} \in V(\tilde{Y}_l)$, и существует изоморфизм графов $\varphi_l : V(\tilde{X}_l) \rightarrow V(\tilde{Y}_l)$, такой что $\varphi_l(x_l^1) = y_l^1, \dots, \varphi_l(x_l^l) = y_l^l$, а также $v(\tilde{X}_l) = v(\tilde{Y}_l) \leq q_l$, и для любой пары $(K, T) \in \mathcal{K}_l$ графы X_l и Y_l не содержат (K, T) -расширений графов \tilde{X}_l и \tilde{Y}_l соответственно. Заметим, что определение выигрыша Консерватора в игре $\text{EHR}(G, H, k)$ совпадает с новым определением выигрыша в k -ом раунде. Заметим, кроме того, что для графов $\tilde{X}_0 = (\emptyset, \emptyset), \tilde{Y}_0 = (\emptyset, \emptyset)$ в силу свойства 1) выполнено условие победы Консерватора в раунде с номером 0. Докажем, что если $1 \leq l \leq k$ и Консерватор выиграл в $(l-1)$ -ом раунде, то он сможет выиграть и в l -ом раунде (в смысле нашего нового определения выигрыша), и, тем самым, докажем утверждение теоремы.

Итак, пусть было сыграно $l-1$ раундов, причем Консерватор выиграл в $(l-1)$ -ом раунде. В l -ом раунде Новатор выбирает некоторую вершину x_l^1 . Если $x_l^1 \in V(\tilde{X}_{l-1})$ или $x_l^1 \in V(\tilde{Y}_{l-1})$, то Консерватор, очевидно, выиграет в l -ом раунде, выбрав вершину y_l^1 , являющуюся образом x_l^1 при изоморфизме φ_{l-1} или φ_{l-1}^{-1} соответственно.

Пусть $x_l^1 \in V(X_{l-1}) \setminus V(\tilde{X}_{l-1})$ (в этом случае положим $\tilde{X}_l = \tilde{X}_{l-1}, \tilde{Y}_l = \tilde{Y}_{l-1}$) или $x_l^1 \in V(Y_{l-1}) \setminus V(\tilde{Y}_{l-1})$ (в этом случае положим $\tilde{X}_l = \tilde{Y}_{l-1}, \tilde{Y}_l = \tilde{X}_{l-1}$).

Определим дополнительную конструкцию, которая нам потребуется в дальнейшем. Пусть $\mathcal{K} = \{(K, T), T \subset K\}$ — некоторое конечное множество пар графов. Пару (\tilde{K}, \tilde{T}) будем называть \mathcal{K} -цепью, если существует такое $r \in \mathbb{N}$ и такой набор графов $\tilde{T} = K^0 \subset K^1 \subset \dots \subset K^r = \tilde{K}$, что для любого $j \in \{1, \dots, r\}$ граф K^j является (K, T) -расширением графа K^{j-1} для некоторой пары $(K, T) \in \mathcal{K}$.

Пусть пара $(Z, X_l|_{V(\tilde{X}_l) \cup \{x_l^1\}})$ для некоторого $Z \subset X_l$ является такой \mathcal{K}_l -цепью, что граф X_l не содержит (K, T) -расширений графа Z ни при каком $(K, T) \in \mathcal{K}_l$. Докажем, что пара (Z, \tilde{X}_l) является $(\alpha + \varepsilon)$ -надежной. Пусть $X_l|_{V(\tilde{X}_l) \cup \{x_l^1\}} = K^0 \subset K^1 \subset \dots \subset K^r = Z$, где для каждого $j \in \{1, \dots, r\}$ граф K^j является (K, T) -расширением графа K^{j-1} для некоторой пары $(K, T) \in \mathcal{K}_l$. Для каждого $j \in \{1, \dots, r\}$ положим $v_j = v(K^j) - v(K^{j-1}), e_j = e(K^j) - e(K^{j-1})$. В силу определения множества \mathcal{K}_l для любого

$j \in \{1, \dots, r\}$ выполнено неравенство $f_{\alpha-\varepsilon}(K^j, K^{j-1}) < 0$. Следовательно, $e_j > \frac{v_j}{\alpha-\varepsilon} > \frac{sv_j}{t}$. Таким образом, $e_j \geq \frac{sv_j+1}{t}$. Поэтому если $r \geq s+1$, то

$$\begin{aligned} f_{\alpha-\varepsilon}(K^r, \tilde{X}_l) &\leq 1 + \sum_{j=1}^r v_j - (\alpha - \varepsilon) \sum_{j=1}^r e_j \leq 1 - \frac{(\alpha - \varepsilon)r}{t} + \left(1 - \frac{(\alpha - \varepsilon)s}{t}\right) \sum_{j=1}^r v_j < \\ &< 1 - \frac{rq}{qs+1} + \frac{r(q-q_l)}{qs+1} = 1 - \frac{rq_l}{qs+1} \leq 1 - \frac{(s+1)q_l}{qs+1} = \frac{s(q-q_l)+1-q_l}{qs+1} = \\ &= \frac{(s+1)^{k-1}-q_l}{qs+1} = 0 \end{aligned}$$

в силу (1) и (2). Итак, $f_{\alpha-\varepsilon}(K^{s+1}, \tilde{X}_l) < 0$. Так как $v(K^{s+1}, \tilde{X}_l) \leq 1+(s+1)(q-q_l) = q-q_{l-1}$, получаем противоречие с определением графа \tilde{X}_l . Следовательно, $r \leq s$. Заметим, что для любого подграфа $\tilde{K}^r \subseteq K^r$, содержащего \tilde{X}_l , выполнено неравенство $f_{\alpha-\varepsilon}(\tilde{K}^r, \tilde{X}_l) \geq 0$, иначе аналогично получим противоречие с определением графа \tilde{X}_l . Докажем, что выполнено более сильное неравенство $f_{\alpha+\varepsilon}(\tilde{K}^r, \tilde{X}_l) > 0$. Действительно, иначе

$$\frac{e(\tilde{K}^r, \tilde{X}_l)}{v(\tilde{K}^r, \tilde{X}_l)} \in \left[\frac{1}{\alpha+\varepsilon}, \frac{1}{\alpha-\varepsilon} \right] \subset \left(\frac{s}{t}, \frac{sq+1}{tq} \right).$$

При этом $v(\tilde{K}^r, \tilde{X}_l) \leq q$, следовательно, $e(\tilde{K}^r, \tilde{X}_l) \in \left(\frac{sq}{t}, \frac{sq}{t} + \frac{1}{t} \right)$. Но данный интервал, очевидно, не содержит целых чисел. Таким образом, пара (K^r, \tilde{X}_l) действительно является $(\alpha+\varepsilon)$ -надежной. Так как $v(K^r) \leq q_{l-1} + 1 + \sum_{j=1}^r v_j \leq q_{l-1} + 1 + s \cdot (q - q_l) = q_l$, то по свойству 2) в графе Y_l существует такая вершина y_l^l (которую и выберет Консерватор) и подграф W , являющийся точным (K^r, \tilde{X}_l) -расширением графа \tilde{Y}_l , что вершина y_l^l является образом вершины x_l^l при изоморфизме графов $\varphi_l : V(K^r) \rightarrow V(W)$, таком что $\varphi_l|_{V(\tilde{X}_l)} = \varphi_{l-1}$ (или φ_{l-1}^{-1}). Переобозначим $\tilde{X}_l = K^r$, $\tilde{Y}_l = W$. Итак, Консерватор выиграл в l -ом раунде.

Таким образом, действуя по описанной стратегии, Консерватор выигрывает в k -ом раунде. А значит, он выигрывает в игре $\text{EHR}(G, H, k)$, что и требовалось доказать.

7 Доказательство теоремы 7

Пусть $\frac{t}{s} \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$. Положим $m = C_{k-2}^{[s/t]} + 1$, $q = \frac{(s+1)^{k-2}(1+sm)-1}{s}$. Пусть $\alpha \in (\frac{tq}{sq+1}, \frac{t}{s})$, $p = n^{-\alpha}$. Введем некоторые дополнительные обозначения. Для каждого $i \in \{0, \dots, k-2\}$ положим $q_i = q - \frac{(s+1)^{k-2-i}(1+sm)-1}{s}$. Как и при доказательстве теоремы 6 определим \mathcal{K}_i (но теперь для $i \in \{0, \dots, k-2\}$) как множество всех таких пар (K, T) , что $f_{\alpha-\varepsilon}(K, T) < 0$, $v(T) \leq q_i$, $v(K, T) \leq q - q_i$. Множество графов, обладающих свойствами 1) и 2), определяется в точности, как и при доказательстве теоремы 6 (с новыми \mathcal{K}_i , где $i \in \{0, \dots, k-2\}$, и q).

В силу теорем 3, 9 и 11 для доказательства теоремы 7 достаточно найти выигрышную стратегию Консерватора в игре $\text{ENR}(G, H, k)$ для всех таких пар графов (G, H) , что $G, H \in \mathcal{S}$.

Итак, пусть $G, H \in \mathcal{S}$. Как и ранее, для каждого $h \in \{1, \dots, k\}$ обозначим за X_h, Y_h графы выбранные в h -ом раунде Новатором и Консерватором соответственно. Вершины, выбранные в первых h раундах в графе X_h , мы будем обозначать x_h^1, \dots, x_h^h , а в графе Y_h — y_h^1, \dots, y_h^h .

Стратегия Консерватора для раундов $1, \dots, k-2$ в точности повторяет стратегию Консерватора для раундов $1, \dots, k$ в доказательстве теоремы 6. Как и ранее, мы говорим, что *Консерватор выиграл в l -ом раунде* (но теперь $l \in \{0, \dots, k-2\}$), если существуют такие подграфы $\tilde{X}_l \subset X_l$ и $\tilde{Y}_l \subset Y_l$, что $\{x_l^1, \dots, x_l^l\} \in V(\tilde{X}_l)$, $\{y_l^1, \dots, y_l^l\} \in V(\tilde{Y}_l)$, и существует изоморфизм графов $\varphi_l : V(\tilde{X}_l) \rightarrow V(\tilde{Y}_l)$, такой что $\varphi_l(x_l^1) = y_l^1, \dots, \varphi_l(x_l^l) = y_l^l$, а также $v(\tilde{X}_l) = v(\tilde{Y}_l) \leq q_l$ и для любой пары $(K, T) \in \mathcal{K}_l$ графы X_l и Y_l не содержат (K, T) -расширений графов \tilde{X}_l и \tilde{Y}_l соответственно. Действуя по описанной в разделе 6 стратегии, Консерватор выигрывает в раунде с номером $k-2$.

Если в $(k-1)$ -ом раунде Новатор выбирает вершину x_{k-1}^{k-1} в графе \tilde{X}_{k-2} (в этом случае положим $\tilde{X}_{k-1} = \tilde{X}_{k-2}$, $\tilde{Y}_{k-1} = \tilde{Y}_{k-2}$) или в графе \tilde{Y}_{k-2} (в этом случае положим $\tilde{X}_{k-1} = \tilde{Y}_{k-2}$, $\tilde{Y}_{k-1} = \tilde{X}_{k-2}$), то Консерватор выберет вершину y_{k-1}^{k-1} , являющуюся образом вершины x_{k-1}^{k-1} при изоморфизме φ_{k-2} или φ_{k-2}^{-1} соответственно. Если и в k -ом раунде Новатор выберет вершину либо в графе \tilde{X}_{k-1} , либо в графе \tilde{Y}_{k-1} , то Консерватор, очевидно, победит, выбрав соответствующую вершину либо в графе \tilde{Y}_{k-1} , либо в графе \tilde{X}_{k-1} . Если же в k -ом раунде Новатор выберет вершину, не принадлежащую ни графу \tilde{X}_{k-1} , ни графу \tilde{Y}_{k-1} , то пусть для определенности он выбрал вершину в графе X_{k-1} . Тогда, в силу победы Консерватора в $(k-2)$ -ом раунде, пара $(X_{k-1}|_{V(\tilde{X}_{k-1}) \cup \{x_k^k\}}, \tilde{X}_{k-1})$ является $(\alpha + \varepsilon)$ -надежной. Следовательно, в силу свойства 2), в графе Y_{k-1} существует такая вершина y_k^k , что граф $Y_{k-1}|_{V(\tilde{Y}_{k-1}) \cup \{y_k^k\}}$ является точным $(X_{k-1}|_{V(\tilde{X}_{k-1}) \cup \{x_k^k\}}, \tilde{X}_{k-1})$ -расширением графа \tilde{Y}_{k-1} . Следовательно, Консерватор победит, выбрав вершину y_k^k .

Пусть в $(k-1)$ -ом раунде Новатор выбирает вершину, принадлежащую либо графу $X_{k-2} \setminus \tilde{X}_{k-2}$ (положим $\tilde{X}_{k-1} = \tilde{X}_{k-2}$, $\tilde{Y}_{k-1} = \tilde{Y}_{k-2}$), либо графу $Y_{k-2} \setminus \tilde{Y}_{k-2}$ (положим $\tilde{Y}_{k-1} = \tilde{X}_{k-2}$, $\tilde{X}_{k-1} = \tilde{Y}_{k-2}$). Для каждого $[s/t]$ -элементного подмножества множества $\{x_{k-1}^1, x_{k-1}^2, \dots, x_{k-1}^{k-2}\}$ выберем в графе $X_{k-1} \setminus \tilde{X}_{k-1}$ ровно одну вершину z (если она существует), соединенную ребром со всеми вершинами из данного $[s/t]$ -элементного подмножества и с вершиной x_{k-1}^{k-1} . Объединим все выбранные таким образом вершины вместе с вершиной x_{k-1}^{k-1} в множество V . Так как $|V| \leq C_{k-2}^{[s/t]} + 1 = m$, то в силу определения графа \tilde{X}_{k-1} пара $(X_{k-1}|_{V(\tilde{X}_{k-1}) \cup V}, \tilde{X}_{k-1})$ является $(\alpha + \varepsilon)$ -надежной. Следовательно, в силу свойства 2) в графе Y_{k-1} существует такая вершина y_{k-1}^{k-1} и граф W ,

являющийся точным $(X_{k-1}|_{V(\tilde{X}_{k-1}) \cup V}, \tilde{X}_{k-1})$ -расширением графа \tilde{Y}_{k-1} , что при изоморфизме графов $X_{k-1}|_{V(\tilde{X}_{k-1}) \cup V}$ и W вершины $x_{k-1}^1, x_{k-1}^2, \dots, x_{k-1}^{k-1}$ переходят в вершины $y_{k-1}^1, y_{k-1}^2, \dots, y_{k-1}^{k-1}$ соответственно.

Если в k -ом раунде Новатор выберет вершину либо в графе \tilde{X}_{k-1} , либо в графе \tilde{Y}_{k-1} , то Консерватор, очевидно, победит, выбрав нужную вершину либо в графе \tilde{Y}_{k-1} , либо в графе \tilde{X}_{k-1} соответственно. Если же в k -ом раунде Новатор выберет вершину, не принадлежащую ни графу \tilde{X}_{k-1} , ни графу \tilde{Y}_{k-1} , то пусть для определенности он выбрал вершину в графе X_{k-1} . Тогда в силу определения графа \tilde{X}_{k-1} вершина x_k^k соединена ребром с не более, чем $[s/t]$ вершинами из графа \tilde{X}_{k-1} , следовательно, она соединена ребром либо с не более, чем $[s/t]$ вершинами из множества $\{x_{k-1}^1, x_{k-1}^2, \dots, x_{k-1}^{k-1}\}$ либо с вершиной x_{k-1}^{k-1} и с $[s/t]$ вершинами из множества $\{x_{k-1}^1, x_{k-1}^2, \dots, x_{k-1}^{k-2}\}$ (иначе

$$f_{\alpha-\varepsilon}(X_{k-1}|_{V(\tilde{X}_{k-1}) \cup \{x_k^k\}}, \tilde{X}_{k-1}) \leq 1 - (\alpha - \varepsilon)([s/t] + 1) < 1 - \frac{([s/t] + 1)tq}{sq + 1} \leq 1 - \frac{(s/t + 1/t)tq}{sq + 1} < 0,$$

что противоречит определению графа \tilde{X}_{k-1}). Во втором случае Консерватор сможет выбрать нужную вершину y_k^k и выиграть по построению. В первом же случае в силу свойства 2) в графе Y_{k-1} существует такая вершина y_k^k , что граф $Y_{k-1}|_{\{y_k^1, y_k^2, \dots, y_k^k\}}$ является точным $(X_{k-1}|_{\{x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^k\}}, X_{k-1}|_{\{x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^{k-1}\}})$ -расширением графа $Y_{k-1}|_{\{y_k^1, y_k^2, \dots, y_k^{k-1}\}}$. Следовательно, Консерватор победит, выбрав вершину y_k^k .

8 Доказательство теоремы 8

Пусть G — произвольный граф, $u, v \in V(G)$, $u \neq v$. Будем говорить, что G является m -цепью с концами u и v , если выполнено следующее условие. Для некоторого $d \in \mathbb{N}$ существуют такие подграфы $W, c_1, c_2, \dots, c_n \subset G$, что W — цепь длины d (длиной цепи называется количество ребер в ней) с концами u, v и ребрами e_1, e_2, \dots, e_d , для любого $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ c_i — клика (полный граф) на m вершинах, содержащая ребро e_i , и, кроме того, $G = c_1 \cup c_2 \cup \dots \cup c_d$, любые две клики c_i, c_j , $i, j \in \{1, \dots, d\}$, $i \neq j$, пересекаются по не более чем одной вершине. Наименьшее из всех чисел d , для которых выполнены эти условия будем называть *длиной m -цепи G* . Будем называть m -цепь длины d *простой*, если в качестве W можно взять простую цепь длины d . Заметим, что если m -цепь длины d является простой, то любая клика c_i , $i \in \{1, \dots, d\}$, из ее определения имеет общие вершины лишь с “соседними” кликами c_{i-1} и c_{i+1} (здесь и далее мы считаем, что $c_0 = c_d$, $c_{d+1} = c_1$). Заметим, наконец, что у любой m -цепи G с концами u, v существует индуцированный подграф, который является простой m -цепью с концами u, v (чтобы доказать существование такого подграфа достаточно в качестве графа W , определяющего этот подграф, выбрать цепь наименьшей длины с концами u, v в G).

Будем говорить, что граф G является m -циклом, если выполнено следующее условие. Для некоторого $d \in \mathbb{N}$ существуют такие подграфы $C, c_1, c_2, \dots, c_d \subset G$, что C — простой цикл длины d (длиной простого цикла называется количество ребер в нем) с ребрами e_1, e_2, \dots, e_d , для любого $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ c_i — клика на m вершинах, содержащая ребро e_i , и, кроме того, $G = c_1 \cup c_2 \cup \dots \cup c_d$, любая клика c_i , $i \in \{1, \dots, d\}$, пересекается только с “соседними” кликами c_{i-1}, c_{i+1} и только по одной вершине (здесь и далее мы считаем, что $c_0 = c_d, c_{d+1} = c_1$). Число d , для которого выполнены эти условия, будем называть *длиной m -цикла G* . Вершины графа C в определении m -цикла мы будем называть его *узловыми вершинами*. Заметим, что число вершин в m -цикле длины d есть $d(m-1)$. Мы будем обозначать M_d граф, являющийся m -циклом длины d .

Обозначим $k_1 = k - 10m + 8$. Из условия теоремы имеем $k_1 \geq 3$. Пусть $l_1, l_2 \in [4, 2^{k_1}]$ — два натуральных числа. Рассмотрим граф G_{l_1, l_2} , являющийся объединением двух копий M и M' графов M_{l_1}, M_{l_2} соответственно, пересекающихся ровно по одной вершине, которая является узловой вершиной обоих графов. Плотность графа G равна

$$\frac{|E(G)|}{|V(G)|} = \frac{(l_1 + l_2) \cdot \frac{m(m-1)}{2}}{(l_1 + l_2)(m-1) - 1} = \frac{1}{\frac{2}{m} - \frac{2}{(l_1 + l_2)m(m-1)}} \geq \frac{1}{\alpha},$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $l_1 = l_2 = 2^{k_1}$. Докажем, что граф G является строго сбалансированным. Обозначим подграфы C, c_1, \dots из определения m -циклов M и M' за $C_1, c_1^1, \dots, c_{l_1}^1$ и $C_2, c_1^2, \dots, c_{l_2}^2$ соответственно. Предположим, что G не строго сбалансирован. Тогда существует такой подграф $H \subset G$, что $\rho(H) \geq \rho(G)$. Можно считать, что H — связен, так как его плотность не превосходит максимальной из плотностей его компонент связности. Можно также считать, что для каждой из клик c_i^j , $i \in \{1, 2, \dots, l_j\}$, $j \in \{1, 2\}$, хотя бы одна вершина которой входит в H , либо все ее ребра входят в H , либо все они в H не входят, иначе добавив “недостающие” ребра, получим граф, плотность которого больше, чем $\rho(G)$. Действительно, предположим, что клика c_i^j содержится в H “частично”, а именно в H входит v ее вершин и $\frac{v(v-1)}{2}$ ребер, где $v \in [2, m-1]$. Тогда, дополнив граф H оставшейся частью клики c_i^j , мы получим граф с плотностью

$$\frac{e(H) + \frac{m(m-1)}{2} - \frac{v(v-1)}{2}}{v(H) + (m-v)} > \rho(G),$$

так как

$$\frac{\frac{m(m-1)}{2} - \frac{v(v-1)}{2}}{m-v} = \frac{m+v-1}{2} \geq \frac{m+1}{2} > \rho(G)$$

при $m \geq 2$. Можно также считать, что если H содержит ровно одну вершину некоторой клики c_i^j , то он содержит не более одной вершины соседних с ним клик c_{i-1}^j и c_{i+1}^j , иначе, удалив соседнюю клику (без одной вершины клики c_i^j), мы уменьшим число вершин на

$m - 1$, а число ребер на $\frac{m(m-1)}{2}$, следовательно, плотность графа увеличится. Таким образом, можем считать, что H — это один из m -циклов M или M' . Но в таком случае $\rho(H) = \frac{m}{2} < \rho(G)$. Получили противоречие.

Поскольку $G_{2^{k_1}, 2^{k_1}}$ — строго сбалансированный граф с плотностью $\frac{1}{\alpha}$, по теореме 3 имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n,p}(N_G > 0) = 1 - e^{-1/a(G)} \notin \{0, 1\}. \quad (3)$$

Будем говорить, что два свойства A, B *асимптотически эквивалентны*, если пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n,p}(A)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n,p}(B)$ существуют и равны. Далее мы приведем пример свойства A из класса \mathcal{L}_k , асимптотически эквивалентного свойству $\{N_G > 0\}$.

Пусть формула $NI(u_1, \dots, u_h)$ выражает свойство, заключающееся в том, что вершины u_1, \dots, u_h попарно различны: $NI(u_1, \dots, u_h) = \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq h} (\neg(u_i = u_j)) \right)$. Определим формулу $K(x_1, x_2, \dots, x_m)$, выражающую свойство “вершины x_1, x_2, \dots, x_m образуют клику размера m ”:

$$K(x_1, x_2, \dots, x_m) = \left(NI(x_1, x_2, \dots, x_m) \wedge \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq m} (x_i \sim x_j) \right) \right).$$

Далее рассмотрим формулу $MK(x_1, x_2, \dots, x_m)$, выражающую свойство “вершины x_1, x_2, \dots, x_m образуют клику размера m , и любая клика графа либо совпадает с этой, либо пересекает ее по не более чем одной вершине”: $MK(x_1, x_2, \dots, x_m) =$

$$(K(x_1, x_2, \dots, x_m) \wedge (\forall y_1 \forall y_2 \dots \forall y_m (K(y_1, y_2, \dots, y_m) \Rightarrow \phi(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m))))),$$

где формула $\phi(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m) =$

$$\left(\left(\bigvee_{\sigma \in \Sigma} \bigwedge_{i=1}^n (x_i = y_{\sigma(i)}) \right) \vee \left(\bigvee_{i=1}^m \bigwedge_{1 \leq \hat{i} \leq m, \hat{i} \neq i} \bigwedge_{j=1}^m (x_i \neq y_j) \right) \right)$$

выражает свойство “множества $\{x_1, \dots, x_m\}, \{y_1, \dots, y_m\}$ либо совпадают, либо пересекаются по не более чем одной вершине” (здесь Σ — множество всех перестановок последовательности $1, \dots, m$). Определим, наконец, для произвольного натурального числа l формулу $D_l(x_1, x_2)$, из истинности которой следует существование m -цепи длины l с концами x_1 и x_2 , никакая вершина которого не проходит через заданное множество вершин u_1, \dots, u_h : при $l > 1$

$$D_l(x_1, x_2, u_1, \dots, u_h) = \left(\exists y \left(D_{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor}(x_1, y) \wedge D_{\lceil \frac{l}{2} \rceil}(y, x_2) \wedge NI(x_1, x_2, y, u_1, \dots, u_h) \right) \right),$$

$$D_1(x_1, x_2, u_1, \dots, u_h) = (\exists x_3 \exists x_4 \dots \exists x_m (MK(x_1, x_2, \dots, x_m) \wedge NI(x_1, \dots, x_m, u_1, \dots, u_h))).$$

Заметим, что если в графе существует m -цепь G длины l с концами x_1 и x_2 , никакая вершина которого не проходит через заданное множество вершин u_1, \dots, u_h , но не является истинной формула $D_l(x_1, x_2, u_1, \dots, u_h)$, то существует клика на m вершинах, пересекающая граф G по хотя бы одному ребру, но не содержащаяся в нем целиком. Из определения формулы $D_l(x_1, x_2, u_1, \dots, u_h)$ легко видеть, что ее кванторная глубина равна $\lceil \log_2 l \rceil + 2m - 2$.

Определим, наконец, искомое свойство A . Положим $l = 2^{k_1-1} - 2$.

$$A = \left(\exists x \exists y \exists y' \exists v_1^1 \dots \exists v_1^{m-1} \dots \exists v_4^1 \dots \exists v_4^{m-1} \exists u_1^1 \dots \exists u_1^{m-1} \dots \exists u_4^1 \dots \exists u_4^{m-1} \right. \\ \left. \left[(\text{NI}(x, y, y', v_i^j, u_i^j, i \in \{1, 2, 3, 4\}, j \in \{1, \dots, m-1\})) \wedge \right. \right. \\ \left. \left(\bigwedge_{i=1}^2 (\text{MK}(y, u_i^1, \dots, u_i^{m-1}) \wedge \text{MK}(y', u_{i+2}^1, \dots, u_{i+2}^{m-1})) \right) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^4 (\text{MK}(x, v_i^1, \dots, v_i^{m-1}) \wedge \right. \right. \\ \left. \left. D_l(v_i^{m-1}, u_i^{m-1}, x, y, y', v_i^j, u_i^j, (i, j) \in J)) \right) \right] \right),$$

где $J = \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{i\} \times \{1, \dots, m-1\} \cup \{i\} \times \{1, \dots, m-2\}$. Из определения свойства A легко видеть, что его кванторная глубина равна $3 + 8m - 8 + \lceil \log_2(2^{k_1-1} - 2) \rceil + 2m - 2 = 10m - 7 + k_1 - 1 = k_1 + 10m - 8 = k$. Следовательно, $A \in \mathcal{L}_k$.

Рассмотрим множество $\tilde{\Omega}_n \subset \Omega_n$ всех графов, в которых не существует подграфов H с $v(H) \leq 2^{m(2k_1+1)}$ и $\rho(H) > 1/\alpha$. В силу теоремы 3 имеем $\mathbf{P}_{n,p}(\tilde{\Omega}_n) = 1$. Пусть $\mathcal{G} \in \tilde{\Omega}_n$ и \mathcal{G} содержит подграф X , изоморфный графе $G_{2^{k_1}, 2^{k_1}}$. Пусть, кроме того, \mathcal{K} — множество всех таких пар (K, T) , что K — полный граф на m вершинах, а $v(T) \geq 2$. Для того, чтобы доказать, что граф \mathcal{G} обладает свойством A достаточно доказать, что в \mathcal{G} нет (K, T) -расширений подграфов графа X . Предположим, что хотя бы одно такое расширение Y имеется. Тогда $\rho(Y \cup X) > 1/\alpha$, так как $\rho(X) = 1/\alpha$,

$$f_\alpha(Y, X) \leq v(Y, X) - \alpha \frac{v(Y, X)(2m - v(Y, X))}{2} \leq v(Y, X) \left(1 - \alpha \frac{m+2}{2} \right) < 0.$$

Кроме того, $v(Y) \leq 2^{2k_1(m-1)-1+m-2} < 2^{m(2k_1+1)}$ Тем самым, получили противоречие с принадлежностью графа \mathcal{G} множеству $\tilde{\Omega}_n$, и, следовательно, граф \mathcal{G} обладает свойством A .

Предположим теперь, что $\mathcal{G} \in \tilde{\Omega}_n$ и \mathcal{G} обладает свойством A . Тогда в графе \mathcal{G} найдутся такие попарно различные вершины $x, y, y', v_i^j, u_i^j, i \in \{1, 2, 3, 4\}, j \in \{1, \dots, m-1\}$, что существуют m -цепи $C_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$, длины l с концами v_i^{m-1}, u_i^{m-1} (обозначим графы W, c_1, \dots, c_l из определения этих m -цепей W_i, c_1^i, \dots, c_l^i), наборы вершин $x, v_i^1, \dots, v_i^{m-1}$,

$i \in \{1, 2, 3, 4\}$, а также $y, u_i^1, \dots, u_i^{m-1}, i \in \{1, 2\}$, и $y', u_i^1, \dots, u_i^{m-1}, i \in \{3, 4\}$, образуют клики, причем графы $C_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$, пересекают эти клики только по концевым вершинам цепей W_i . Как было замечено выше, в каждом из графов $C_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$, содержится подграф \tilde{C}_i , являющийся простой m -цепью с концами v_i^{m-1}, u_i^{m-1} . Если \mathcal{G} не содержит подграфа, изоморфного графу X , то либо хотя бы одна из цепей $\tilde{C}_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$, имеет длину меньше, чем $2^{k_1-1} - 2$, либо хотя бы два графа из $\tilde{C}_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$, пересекаются по вершинам. Очевидно, в таком случае в графе \mathcal{G} существует подграф, изоморфный графу G_{l_1, l_2} , где $l_1, l_2 \in [4, 2^{k_1}]$, причем хотя бы одно из l_1, l_2 строго меньше чем 2^{k_1} . Но $\rho(G_{l_1, l_2}) > 1/\alpha, v(G_{l_1, l_2}) < 2^{2k_1 m}$. Получили противоречие. Следовательно, граф \mathcal{G} содержит подграф, изоморфный $G_{2^{k_1}, 2^{k_1}}$.

Таким образом, в силу (3)

$$P_{n,p}(A) \sim P_{n,p}(\tilde{\Omega}_n \cap A) = P_{n,p}(\tilde{\Omega}_n \cap \{N_G > 0\}) \sim P_{n,p}(N_G > 0) \sim 1 - e^{-1/a(G)}.$$

Следовательно, поскольку кванторная глубина свойства A не превосходит k , то для $\alpha = \frac{2}{m} - \frac{1}{2^{k_1 m(m-1)}}$ случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ не подчиняется k -закону нуля или единицы.

Список литературы

- [1] М.Е. Жуковский, А.М. Райгородский, *Случайные графы: модели и предельные характеристики*, Успехи математических наук, в печати, 2014.
- [2] P. Erdős, A. Rényi, *On the evolution of random graphs*, Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl. **5**: 17–61, 1960.
- [3] B. Bollobás, *Threshold functions for small subgraphs*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **90**: 197–206, 1981.
- [4] S. Janson, T. Łuczak, A. Ruciński, *Random Graphs*, New York, Wiley, 2000.
- [5] B. Bollobás, *Random Graphs*, 2nd Edition, Cambridge University Press, 2001.
- [6] В.Ф. Колчин, *Случайные графы*, 2-е издание, Физматлит, Москва, 2004.
- [7] Н. Алон, Дж. Спенсер, *Вероятностный метод*, Москва, БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007.
- [8] А.М. Райгородский, *Модели случайных графов*, Москва, МЦНМО, 2011.
- [9] Н.К. Верещагин, А. Шень, *Языки и исчисления*, Москва, МЦНМО, 2000.
- [10] В.А. Успенский, Н.К. Верещагин, В.Е. Плиско, *Вводный курс математической логики*, МГУ, Физматлит, Москва, 1997.

- [11] S. Shelah, J.H. Spencer, *Zero-one laws for sparse random graphs*, J. Amer. Math. Soc., **1**: 97–115, 1988.
- [12] J.H. Spencer, *The Strange Logic of Random Graphs*, Number 22 in Algorithms and Combinatorics, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [13] M.E. Zhukovskii, *Zero-one k -law*, Discrete Mathematics, **312**: 1670–1688, 2012.
- [14] М.Е. Жуковский, *Законы нуля или единицы для формул первого порядка с ограниченной кванторной глубиной*, Доклады Академии Наук, **436(1)**: 14–18, 2011.
- [15] М.Е. Жуковский, *Расширение k -закона нуля или единицы*, Доклады Академии Наук, **454(1)**: 23–26, 2014.
- [16] М.Е. Жуковский *О наибольшей критической точке в k -заcone нуля или единицы*, Математический Сборник, в печати, 2014.
- [17] J.H. Spencer *Infinite spectra in the first order theory of graphs*, Combinatorica, **10**: 95–102, 1990.
- [18] S. Shelah, J.H. Spencer, *Zero-one laws for sparse random graphs*, J. Amer. Math. Soc., **1**: 97–115, 1988.
- [19] A. Ruciński, A. Vince, *Strongly balanced graphs and random graphs*, J. Graph Theory, **10**: 251–264, 1986.
- [20] М.Е. Жуковский, *О 4-заcone нуля или единицы для случайного графа Эрдеша–Реньи*, Математические заметки, в печати, 2014.
- [21] B. Bollobás, *Threshold functions for small subgraphs*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **90**: 197–206, 1981.
- [22] A. Ruciński, A. Vince, *Balanced graphs and the problem of subgraphs of a random graph*, Congressus Numerantium, **49** (1985), 181–190.
- [23] J.H. Spencer, *Counting extensions*, J. Comb. Th., Ser. A, **55**: 247–255, 1990.
- [24] A. Ehrenfeucht, *An application of games to the completeness problem for formalized theories*, Warszawa, Fund. Math., **49**: 121–149, 1960.
- [25] J.H. Spencer, M.E. Zhukovskii, *Spectra for Random Graphs of fixed Quantifier Depth*, Discrete Mathematics, 2015, submitted.